Sobre algunos problemas de asignación

Francisco Sánchez Sánchez

CIMAT

Seminario de Estudiantes de Matemáticas Aplicadas
Septiembre, 2013.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.
- $\{\succ_m\}_{m \in M}$ relación de preferencia de las mujeres.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.
- $\{\succ_m\}_{m\in M}$ relación de preferencia de las mujeres.
- $\{\succ_h\}_{h\in N}$ relación de preferencia de los hombres.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.
- $\{\succ_m\}_{m\in M}$ relación de preferencia de las mujeres.
- $\{\succ_h\}_{h\in N}$ relación de preferencia de los hombres.
- Supuestos:

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.
- $\{\succ_m\}_{m\in M}$ relación de preferencia de las mujeres.
- $\{\succ_h\}_{h\in N}$ relación de preferencia de los hombres.
- Supuestos:
  - Cada mujer y cada hombre omiten de su lista, a las parejas potenciales que no aceptarían bajo ninguna circunstancia.

Problema del matrimonio

- M conjunto de mujeres.
- N conjunto de hombres.
- $\{\succ_m\}_{m \in M}$ relación de preferencia de las mujeres.
- $\{\succ_h\}_{h \in N}$ relación de preferencia de los hombres.
- Supuestos:
  - Cada mujer y cada hombre omiten de su lista, a las parejas potenciales que no aceptarían bajo ninguna circunstancia.
  - No se permiten empates.

Problema del matrimonio

Definición. Una asignación (matching) es una función

$$\mu : M \cup N \to M \cup N$$

tal que $\mu(m) \in N$, $\mu(h) \in M$ y $\mu = \mu^{-1}$.

Problema del matrimonio

- Existen problemas para los cuales no se pueden satisfacer todas las preferencias:

Problema del matrimonio

- Existen problemas para los cuales no se pueden satisfacer todas las preferencias:
- $$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline A \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \beta \\ \hline B \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \hline \beta \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array}$$

Problema del matrimonio

- Existen problemas para los cuales no se pueden satisfacer todas las preferencias:
-

α	β	A	B
A	B	β	α
B	A	α	β

- Si en todo lo demás hay empate, se le va a dar preferencia a los hombres.

Criterio de asignación

- **Definición.** Una asignación μ es estable si no existe una pareja (h, m) tal que $\mu(m) \neq h$, $h \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_h \mu(h)$. Sea S el conjunto de asignaciones estables.

Criterio de asignación

- **Definición.** Una asignación μ es estable si no existe una pareja (h, m) tal que $\mu(m) \neq h$, $h \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_h \mu(h)$. Sea S el conjunto de asignaciones estables.

- **Definición.** Una asignación $\mu \in S$, se dice óptima si y sólo si $\mu(h) \succ_h \widehat{\mu}(h)$ para todo $h \in N$ y toda $\widehat{\mu} \in S$.

Criterio de asignación

- **Definición.** Una asignación μ es estable si no existe una pareja (h, m) tal que $\mu(m) \neq h$, $h \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_h \mu(h)$. Sea S el conjunto de asignaciones estables.

- **Definición.** Una asignación $\mu \in S$, se dice óptima si y sólo si $\mu(h) \succ_h \widehat{\mu}(h)$ para todo $h \in N$ y toda $\widehat{\mu} \in S$.

- **Lema.** A lo más hay una solución óptima

Problema del matrimonio

Teorema. Siempre existe una asignación estable para el problema del matrimonio.

Algoritmo de aceptación diferida

- Mientras haya mujer sin propuesta,

Algoritmo de aceptación diferida

- Mientras haya mujer sin propuesta,
  - Cada hombre sin aceptación diferida, le propone matrimonio a la mujer que más prefiera del conjunto de mujeres que no lo han rechazado.

Algoritmo de aceptación diferida

- Mientras haya mujer sin propuesta,
    - Cada hombre sin aceptación diferida, le propone matrimonio a la mujer que más prefiera del conjunto de mujeres que no lo han rechazado.
    - Cada mujer otorga aceptación diferida a lo más a uno y rechaza a los demás.

Algoritmo de aceptación diferida

- Mientras haya mujer sin propuesta,
  - Cada hombre sin aceptación diferida, le propone matrimonio a la mujer que más prefiera del conjunto de mujeres que no lo han rechazado.
  - Cada mujer otorga aceptación diferida a lo más a uno y rechaza a los demás.
- La asignación resultante es estable y prueba el teorema anterior.

Problema del matrimonio

-

	A	B	C	D
α	$1,3$	$2,2$	$3,1$	$4,3$
β	$1,4$	$2,3$	$3,2$	$4,4$
γ	$3,1$	$1,4$	$2,3$	$4,2$
δ	$2,2$	$3,1$	$1,4$	$4,1$

Problema del matrimonio

-

	A	B	C	D
α	$1,3$	$2,2$	$3,1$	$4,3$
β	$1,4$	$2,3$	$3,2$	$4,4$
γ	$3,1$	$1,4$	$2,3$	$4,2$
δ	$2,2$	$3,1$	$1,4$	$4,1$

- Si
  $|N| \leq |M|$ el procedimiento termina tan pronto como $|N|$ mujeres tienen alguien con aceptación diferida.
  $|N| > |M|$ el procedimiento termina cuando todo hombre ya sea, o tiene aceptación diferida o ha sido rechazado por todas las mujeres.

Problema del matrimonio

Teorema. La asignación μ que resulta del procedimiento de aceptación diferida es óptima.

Ejemplos

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ \alpha & 1,3 & 2,2 & 3,1 \\ \beta & 3,1 & 1,3 & 2,2 \\ \gamma & 2,2 & 3,1 & 1,3 \end{array}$$

Tres asignaciones estables.

1. Dar a cada mujer su mejor opción.

Ejemplos

	A	B	C
α	$1,3$	$2,2$	$3,1$
β	$3,1$	$1,3$	$2,2$
γ	$2,2$	$3,1$	$1,3$

Tres asignaciones estables.

1. Dar a cada mujer su mejor opción.
2. Dar a cada hombre su mejor opción.

Ejemplos

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ \alpha & 1,3 & 2,2 & 3,1 \\ \beta & 3,1 & 1,3 & 2,2 \\ \gamma & 2,2 & 3,1 & 1,3 \end{array}$$

Tres asignaciones estables.

1. Dar a cada mujer su mejor opción.
2. Dar a cada hombre su mejor opción.
3. Dar a todos su segunda opción.

Ejemplos

	A	B	C	D
α	$1,3$	$2,3$	$3,2$	$4,3$
β	$1,4$	$4,1$	$3,3$	$2,2$
γ	$2,2$	$1,4$	$3,4$	$4,1$
δ	$4,1$	$2,2$	$3,1$	$1,4$

Sólo hay una asignación estable, ninguno recibe su primera opción.

Problema del matrimonio

- Todo hombre queda con la mujer que más prefiere del conjunto de mujeres que no lo rechazaron.

Problema del matrimonio

- Todo hombre queda con la mujer que más prefiere del conjunto de mujeres que no lo rechazaron.
- Toda mujer queda con su mejor opción del conjunto de hombres que la seleccionaron.

Problema del matrimonio

- Todo hombre queda con la mujer que más prefiere del conjunto de mujeres que no lo rechazaron.
- Toda mujer queda con su mejor opción del conjunto de hombres que la seleccionaron.
- Hay un procedimeiento simétrico donde las mujeres proponen.

Problema del matrimonio

- Todo hombre queda con la mujer que más prefiere del conjunto de mujeres que no lo rechazaron.
- Toda mujer queda con su mejor opción del conjunto de hombres que la seleccionaron.
- Hay un procedimeiento simétrico donde las mujeres proponen.
- Este procedimiento es óptimo para las mujeres.

Problema del matrimonio

- Todo hombre queda con la mujer que más prefiere del conjunto de mujeres que no lo rechazaron.
- Toda mujer queda con su mejor opción del conjunto de hombres que la seleccionaron.
- Hay un procedimeiento simétrico donde las mujeres proponen.
- Este procedimiento es óptimo para las mujeres.
- Las soluciones para los dos procedimientos es la misma sólo cuando el problema tiene una única asignación estable.

El problema de los compañeros de cuarto

- Un número par de estudiantes, dos en cada cuarto.

El problema de los compañeros de cuarto

- Un número par de estudiantes, dos en cada cuarto.
- **Definición.** Una asignción es estable si y sólo si no existen dos estudiantes que no fueron asignados, que se prefieren a lo que les toco.

El problema de los compañeros de cuarto

- Un número par de estudiantes, dos en cada cuarto.
- **Definición.** Una asignción es estable si y sólo si no existen dos estudiantes que no fueron asignados, que se prefieren a lo que les toco.
- En general, no existe asignación estable para este problema.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \beta & \gamma & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \\ \delta & \delta & \delta \end{array}$$

Problema de admisión

- M conjunto de colegios.

Problema de admisión

- M conjunto de colegios.
- N conjunto de alumnos.

Problema de admisión

- M conjunto de colegios.
- N conjunto de alumnos.
- $\{\succ_c\}_{c \in M}$ relación de preferencia de los colegios.

Problema de admisión

- M conjunto de colegios.
- N conjunto de alumnos.
- $\{\succ_c\}_{c \in M}$ relación de preferencia de los colegios.
- $\{\succ_e\}_{e \in N}$ relación de preferencia de los estudiantes.

Problema de admisión

- M conjunto de colegios.
- N conjunto de alumnos.
- $\{\succ_c\}_{c \in M}$ relación de preferencia de los colegios.
- $\{\succ_e\}_{e \in N}$ relación de preferencia de los estudiantes.
- $\{q_c\}_{c \in M}$ cada colegio tiene una couta máxima de alumnos.

Problema de admisión

Dificultades en el proceso de admisión

1. Los estudiantes aplican a varios colegios. No se sabe que tan seria es la solicitud.

Problema de admisión

Dificultades en el proceso de admisión

1. Los estudiantes aplican a varios colegios. No se sabe que tan seria es la solicitud.
2. Los estudiantes hacen creer que cada colegio es su mejor opción.

Problema de admisión

Dificultades en el proceso de admisión

1. Los estudiantes aplican a varios colegios. No se sabe que tan seria es la solicitud.
2. Los estudiantes hacen creer que cada colegio es su mejor opción.
3. Los colegios aceptan un número por arriba de su cuota.

Problema de admisión

Dificultades en el proceso de admisión

1. Los estudiantes aplican a varios colegios. No se sabe que tan seria es la solicitud.
2. Los estudiantes hacen creer que cada colegio es su mejor opción.
3. Los colegios aceptan un número por arriba de su cuota.
4. El resultado está muy lejos del óptimo.

Problema de admisión

Supuestos:

1. Cada estudiante y cada colegio omiten de su lista a los colegios o estudiantes respectivamente, que no aceptarían bajo ninguna circunstancia.

Problema de admisión

Supuestos:

1. Cada estudiante y cada colegio omiten de su lista a los colegios o estudiantes respectivamente, que no aceptarían bajo ninguna circunstancia.
2. No se permiten empates.

Problema de admisión

Supuestos:

1. Cada estudiante y cada colegio omiten de su lista a los colegios o estudiantes respectivamente, que no aceptarían bajo ninguna circunstancia.
2. No se permiten empates.
3. Si en todo lo demás hay empate, se le va a dar preferencia a los estudiantes.

Problema de admisión

Definición. Una asignación (matching) es una correspondencia

$$\mu : M \cup N \to M \cup N$$

tal que $\mu(e) \in N$, $\mu(c) \subseteq M$ y $\mu = \mu^{-1}$. Además $|\mu(c)| \leq q_c$ para todo $c \in M$.

Problema de admisión

- **Definición.** Una asignación μ es inestable si existen dos colegios c_1, c_2 y dos estudiantes e_1, e_2 tales $\mu(c_i) = e_i$, $e_1 \succ_{c_1} e_2$ y $c_2 \succ_{e_2} c_1$. Si μ no es inestable, es estable. Sea S el conjunto de asignaciones estables.

Problema de admisión

- **Definición.** Una asignación μ es inestable si existen dos colegios c_1, c_2 y dos estudiantes e_1, e_2 tales $\mu(c_i) = e_i$, $e_1 \succ_{c_1} e_2$ y $c_2 \succ_{e_2} c_1$. Si μ no es inestable, es estable. Sea S el conjunto de asignaciones estables.

- **Definición.** Una asignación $\mu \in S$, se dice óptima para los estudiantes si y sólo si $\mu(e) \succ_e \widehat{\mu}(e)$ para todo $e \in N$ y toda $\widehat{\mu} \in S$.

Problema de admisión

- **Lema.** A lo más hay una solución óptima.

Problema de admisión

- **Lema.** A lo más hay una solución óptima.
- **Teorema.** Siempre existe una asignación estable para el problema de de admisión.

Problema de admisión

- **Lema.** A lo más hay una solución óptima.
- **Teorema.** Siempre existe una asignación estable para el problema de de admisión.
- El procedimiento termina cuando todo estudiante o bien esta en una lista de espera o ha sido rechazado por todo colegio.

Algoritmo de aceptación diferida para el problema de admisión

- Mientras haya algún estudiante o bien sin estar en una lista de espera o no ha sido rechazado por todos colegios,

Algoritmo de aceptación diferida para el problema de admisión

- Mientras haya algún estudiante o bien sin estar en una lista de espera o no ha sido rechazado por todos colegios,
  - Cada alumno sin lista de espera, solicita admisión al colegio que más prefiere del conjunto de colegios que no lo han rechazado.

Algoritmo de aceptación diferida para el problema de admisión

- Mientras haya algún estudiante o bien sin estar en una lista de espera o no ha sido rechazado por todos colegios,
  - Cada alumno sin lista de espera, solicita admisión al colegio que más prefiere del conjunto de colegios que no lo han rechazado.
  - De todas las solicitudes que tiene el colegio c, elige los mejores q_c estudianes y rechaza a los demás.

Algoritmo de aceptación diferida para el problema de admisión

- Mientras haya algún estudiante o bien sin estar en una lista de espera o no ha sido rechazado por todos colegios,
  - Cada alumno sin lista de espera, solicita admisión al colegio que más prefiere del conjunto de colegios que no lo han rechazado.
  - De todas las solicitudes que tiene el colegio c, elige los mejores q_c estudianes y rechaza a los demás.
- La asignación resultante es estable y prueba el teorema anterior.

Problema de admisión

Teorema. Todo estudiante esta al menos tan bien bajo la asignación del procedimiento de aceptación diferida, como lo está con cualquier otra asignación estable.

Problema de admisión

- Todo alumno queda en la mejor escuela, de acuerdo a su criterio, de todas las que no lo rechazaron.

Problema de admisión

- Todo alumno queda en la mejor escuela, de acuerdo a su criterio, de todas las que no lo rechazaron.

- Todo colegio queda con el mejor subconjunto de alumnos del conjunto de alumnos que le solicitaron en el proceso.

El mejor ciclo de intercambio (Top Trading Cycle)

- Se tiene un conjunto de agentes, cada uno con una casa que desea intercambiar.

El mejor ciclo de intercambio (Top Trading Cycle)

- Se tiene un conjunto de agentes, cada uno con una casa que desea intercambiar.

- Cada agente tiene un orden completo sobre todas las casas, incluyendo la suya.

Algoritmo

- Mientras haya agentes en el juego,

Algoritmo

- Mientras haya agentes en el juego,
  - Cada agente apunta a la casa que más prefiere.

Algoritmo

- Mientras haya agentes en el juego,
  - Cada agente apunta a la casa que más prefiere.
  - Todos los agentes en un ciclo, intercambian y salen del juego.

Referencias

D. Gale and L. S. Shapley 1962. College Admissions and the Stability of Marriage. The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1, pp. 9-15.

Loyd Shapley and Herbert Scarf. 1974. On cores and indivisibility. Journal of Mathematical Economics,1(1): 23-37.